



ce
pre
UNI

Trigonometría

✓ IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO SIMPLE

**CICLO
PRE 2024 - I**



NOCIONES PREVIAS

Conjunto de valores admisibles de una variable (CVA)

Se denomina conjunto de valores admisibles de una variable en una expresión $E(x)$, al conjunto de números reales para el cual la expresión $E(x)$ está definida, es decir, si a es un valor admisible de $E(x)$, $E(a)$ es un número real.



Ejemplos:

1. Si: $E(x) = \cos(3x) + 4x^6$; $CVA = \mathbb{R}$
2. Si: $E(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $CVA = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 3\}$
3. Si: $E(x) = 5\cot^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)$; $CVA = \{x \in \mathbb{R} / x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$
4. Si: $E(x) = \ln(x^2 - 1)$; $CVA = \mathbb{R} - [-1; 1]$



IDENTIDAD

Una **Identidad** es una igualdad, que es válida para un conjunto considerable de valores admisibles.

Una **ecuación** es una igualdad que es cierta para algunos valores de las incógnitas y falsa para otros.

Por tanto, la diferencia entre identidad y ecuación es que la identidad siempre es cierta, mientras que la ecuación no.



Ejemplos: Identidad

$$1. \forall x \in \mathbb{R}: (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}: \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}: \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$4. \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right\}, n \in \mathbb{Z}: \frac{\cos(5x)}{\cos(x)} = 2\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1$$



Ejemplos: Ecuación

$$1. 2x = 3x - 1 \quad \therefore x = 1$$

$$2. x^2 = 9 \quad \therefore \text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

$$3. 2\sin^2(x) = 1 \quad \therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{(2k + 1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA (I.T)

Una identidad trigonométrica es una igualdad en la que intervienen las razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor admisible de la variable real.

Clasificación



1

I.T de un arco simple

2

I.T de arcos compuestos

3

I.T del arco doble

4

I.T del arco mitad

5

I.T del arco triple

6

Transformaciones Trigonométricas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO SIMPLE

Podemos clasificarlas en dos grupos, tales como:

1. Identidades Fundamentales

Se denominan así porque a partir de estas identidades se derivan muchas otras, estas se clasifican en:

1.1 Identidades Recíprocas ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}: \quad \mathbf{\text{sen}(x) \csc(x) = 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right\}: \quad \mathbf{\text{cos}(x) \sec(x) = 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{n\pi}{2} \right\}: \quad \mathbf{\text{tan}(x) \cot(x) = 1}$$



También

$$* \quad \csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

$$* \quad \sec(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)}$$

$$* \quad \cot(x) = \frac{1}{\text{tan}(x)}$$

1.2 Identidades por División ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right\}: \tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}: \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

1.3 Identidades Pitagóricas ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\forall x \in \mathbb{R}: \text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \right\}: \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}: \csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$$

También

$$* \tan(x) \cos(x) = \text{sen}(x)$$

$$* \cot(x) \text{sen}(x) = \cos(x)$$

$$* \text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$* \cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$$

$$* \sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$$

$$* \sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$$

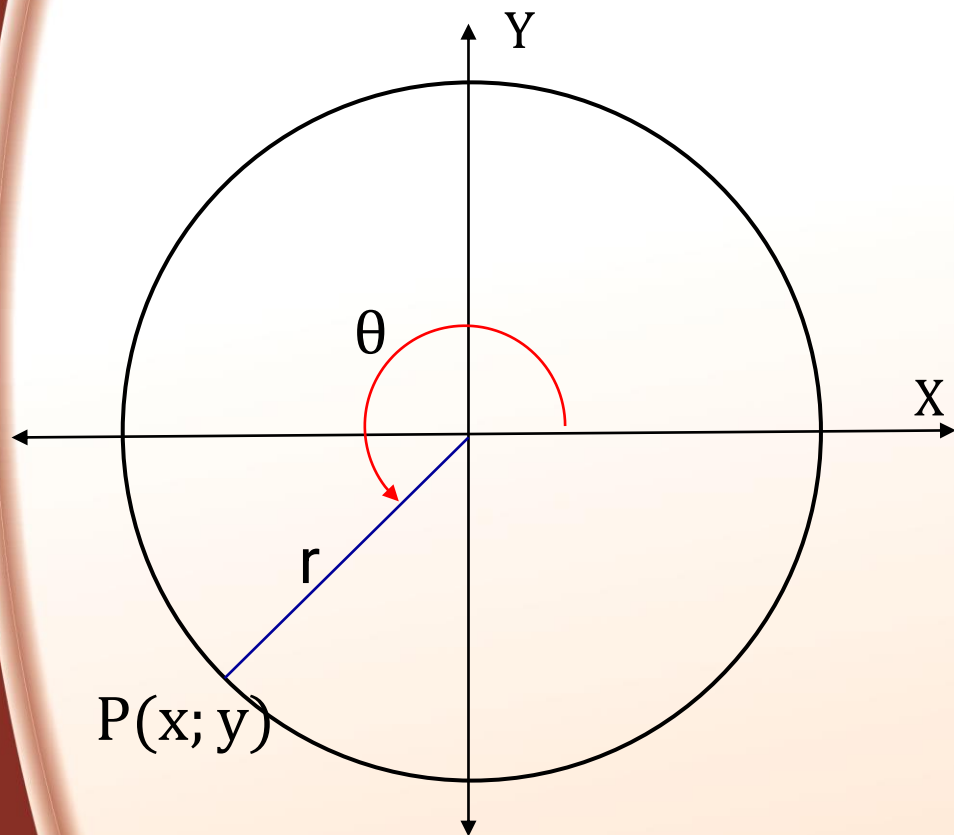
$$* \csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$$

$$* \csc^2(x) - 1 = \cot^2(x)$$



Demostraciones

Consideremos arbitrariamente un ángulo en posición normal, no cuadrantal de medida θ .



Por definición:

$$1. \quad \text{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \quad ; \quad \text{csc}(\theta) = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\text{Multiplico: } \left(\frac{y}{r}\right) \left(\frac{r}{y}\right) = 1 \Rightarrow \text{sen}(\theta) \text{csc}(\theta) = 1$$

$$2. \quad \text{tan}(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} \Rightarrow \text{tan}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$

$x \neq 0$

$$3. \quad \text{Partimos de: } x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{Dividimos entre } r^2: \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

Identificamos las RT:

$$\Rightarrow \text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$$





NOTA

Las identidades trigonométricas tienen una serie de aplicaciones dentro de las cuales, podemos señalar las demostraciones, simplificaciones, solución de ecuaciones condicionales entre otros, todos ellos muy importantes en el desarrollo y aplicaciones del cálculo.

A continuación, estudiaremos 5 tipos de aplicaciones tales como:

- ✓ Problemas tipo demostración.
- ✓ Problemas tipo simplificación.
- ✓ Problemas tipo condicionales.
- ✓ Problemas tipo eliminación de variables.
- ✓ Problemas gráficos



PROBLEMA 01

Simplifique

$$M = \cot(x) (1 - \cos^2(x)) - \tan(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x))$$

A) $\operatorname{sen}(x)$

D) 1

B) $\cos(x)$

E) $\tan(x)$

C) 0

CLAVE: C**PROBLEMA 02**

Reducir

$$N = \frac{\operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}^3(x)}{2\cos^3(x) - \cos(x)}$$

A) $\tan(x)$

D) $\cos(x)$

B) $\cot(x)$

E) $\sec(x)$

C) $\operatorname{sen}(x)$

CLAVE: A

PROBLEMA 3

Señale verdadero (V) o falso (F), según corresponda en cada caso:

I. $\tan^2(x)(1 - \sin^2(x)) = 1 - \cos^2(x)$

II. $\cot^2(x) - \cos^2(x) = \cot^2(x)\cos^2(x)$

III. $\frac{\csc(x) - \sin(x)}{\sec(x) - \cos(x)} = \cot^2(x)$

A) VFV

B) VFF

C) VVF

D) FFV

E) FVF

CLAVE: E

PROBLEMA 4

Simplifique:

$$\csc(x) (\sec(x) + 1) - \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}$$

A) $\cos(x)$

B) $\tan(x)$

C) $\cot(x)$

D) $\sin(x)$

E) $\sec(x)$

CLAVE: B

PROBLEMA 05

Sea $\tan(x) + \cot(x) = 4$,
calcule:

$$P = \tan^2(x) + \cot^2(x) - 1$$

A) 14

D) 8

B) 10

E) 12

C) 13

CLAVE: C

PROBLEMA 06 (Prob. 172 del material de estudio)

De las igualdades mostradas

$$2 \sec(\alpha) = 3 \cot(\beta)$$

$$3 \tan(\alpha) = 2 \csc(\beta)$$

Calcule el valor de $\cos^2(\beta)$.

A) $\frac{4}{9}$

D) $\frac{5}{8}$

B) $\frac{5}{9}$

E) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{2}{3}$

CLAVE: A

PROBLEMA 7

Simplifique:

$$\sqrt{\operatorname{sen}^4(x) + 4\cos^2(x)} - \sqrt{\cos^4(x) + 4\operatorname{sen}^2(x)}$$

A) $1 - 2\cos^2(x)$

B) $1 + \cos^2(x)$

C) $1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$

D) $\cos(x)$

E) $1 - 2\operatorname{sen}(x)$

CLAVE: C

PROBLEMA 08

Si $\tan(x) = 2\operatorname{sen}(x)$; $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$.
Calcule $\operatorname{sen}(x)\tan(x)$.

- | | |
|-----------|----------|
| A) $3/2$ | D) 1 |
| B) $-3/2$ | E) $1/2$ |
| C) $-1/3$ | |

CLAVE: A

PROBLEMA 09

Simplifique

$$E = \sqrt{\frac{\sec(40^\circ) - \tan(40^\circ)}{\sec(40^\circ) + \tan(40^\circ)}} + \tan(40^\circ)$$

- | | |
|---------------------|--------|
| A) $\cos(40^\circ)$ | D) 1 |
| B) $\sec(40^\circ)$ | E) 2 |
| C) $\tan(40^\circ)$ | |

CLAVE: B

2. Identidades Auxiliares

Se denomina de esta manera a algunas identidades trigonométricas que son de frecuente aplicación y que su uso permite una solución más rápida del problema que se está resolviendo.

1. $(\sin(x) \pm \cos(x))^2 = 1 \pm 2\sin(x)\cos(x)$

2. $\sin^4(x) + \cos^4(x) = 1 - 2\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)$

3. $\sin^6(x) + \cos^6(x) = 1 - 3\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)$

4. $\tan(x) + \cot(x) = \sec(x) \cdot \csc(x)$

5. $\sec^2(x) + \csc^2(x) = \sec^2(x) \cdot \csc^2(x)$

6. $(1 \pm \sin(x) \pm \cos(x))^2 = 2(1 \pm \sin(x))(1 \pm \cos(x))$



Nota: Todas la identidades dadas, en sus respectivos valores admisibles.



Identidades Adicionales

$$1. \sec(x) + \tan(x) = \frac{1}{\sec(x) - \tan(x)}$$



Observación: Si: $\sec(x) + \tan(x) = m$
 $\Rightarrow \sec(x) - \tan(x) = \frac{1}{m}$

$$\begin{cases} \sec(x) = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right) \\ \tan(x) = \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{m} \right) \end{cases}$$

Todas la identidades
dadas, en sus respectivos
valores admisibles



$$2. \csc(x) + \cot(x) = \frac{1}{\csc(x) - \cot(x)}$$

$$3. \text{ Si } a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sin(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ y } \cos(x) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$4. \frac{\cos(x)}{1 \pm \sin(x)} = \frac{1 \mp \sin(x)}{\cos(x)}$$

$$5. \frac{\sin(x)}{1 \pm \cos(x)} = \frac{1 \mp \cos(x)}{\sin(x)}$$



Demostraciones:

$$2. \text{sen}^4(x) + \text{cos}^4(x) = \underbrace{\text{sen}^4(x) + \text{cos}^4(x) + 2\text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x)}_{(\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x))^2} - 2\text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_1$$

$$\Rightarrow \text{sen}^4(x) + \text{cos}^4(x) = 1 - 2\text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x)$$

LQQD

$$3. \text{sen}^6(x) + \text{cos}^6(x) = \underbrace{(\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x))}_1 \underbrace{(\text{sen}^4(x) - \text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x) + \text{cos}^4(x))}_{1 - 2\text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x) - \text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x)}$$

$$\Rightarrow \text{sen}^6(x) + \text{cos}^6(x) = 1 - 3\text{sen}^2(x)\text{cos}^2(x)$$

LQQD

$$4. \tan(x) + \cot(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} + \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x)}{\text{cos}(x)\text{sen}(x)} = \frac{1}{\text{cos}(x)} \cdot \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

$$\Rightarrow \tan(x) + \cot(x) = \sec(x)\csc(x)$$

LQQD

$$5. \sec^2(x) + \csc^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sec^2(x) + \csc^2(x) = \sec^2(x) \csc^2(x)} \quad \boxed{\text{LQQD}}$$

$$6.1 \quad (1 + \sin(x) + \cos(x))^2 = \left((1 + \sin(x)) + \cos(x) \right)^2$$

$$(1 + \sin(x) + \cos(x))^2 = \underbrace{(1 + \sin(x))^2 + \cos^2(x)}_{2(1 + \sin(x))} + 2(1 + \sin(x)) \cos(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \sin(x) + \cos(x))^2 = 2(1 + \sin(x))(1 + \cos(x))} \quad \boxed{\text{LQQD}}$$

$$6.2 \quad (1 - \sin(x) - \cos(x))^2 = \left((1 - \sin(x)) - \cos(x) \right)^2$$

$$(1 - \sin(x) - \cos(x))^2 = \underbrace{(1 - \sin(x))^2 + \cos^2(x)}_{2(1 - \sin(x))} - 2(1 - \sin(x)) \cos(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 - \sin(x) - \cos(x))^2 = 2(1 - \sin(x))(1 - \cos(x))} \quad \boxed{\text{LQQD}}$$

PROBLEMA 10

Reducir:

$$F = \frac{(\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + 1)(\operatorname{sen}(x) + \cos(x) - 1) \sec^2(x)}{\tan(x) + \cot(x)}$$

A) $2\operatorname{sen}^2(x)$

B) $2\cos^2(x)$

C) $2\tan^2(x)$

D) $2\cot^2(x)$

E) $2\operatorname{csc}^2(x)$

CLAVE: A

PROBLEMA 11

Si $\tan(x) + \cot(x) = 2\sec(x)$ y $0 < x < 180^\circ$. Determine x .

A) 30°

D) A y B

B) 120°

E) A y C

C) 150° **CLAVE: E****PROBLEMA 12**

Si $\tan(x) + \cot(x) = 4$

Calcule el valor de

$$(\sec(x) - \csc(x))^2$$

A) 2

D) 2^4 B) 2^2 E) 2^5 C) 2^3 **CLAVE: C**

PROBLEMA 13

Simplifique:

$$C = \sqrt{\sec^2(x)\csc^2(x) - 4} + \sqrt{\sec^2(x) + \csc^2(x)} ; x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; 3 \right\rangle$$

A) $2\tan x$

B) $-2\tan x$

C) $-2\cot x$

D) $2\cot x$

E) -1

CLAVE: C

PROBLEMA 14 (PC 03 CEPRE 2017 – II)

Si $\tan(x) - 2\tan(y) = 2\cot(y) - \cot(x)$, entonces calcule

$$\frac{\sin^2(x) - \sin^4(x)}{\sin^2(y) - \sin^4(y)}$$

A) 0.25

B) 2

C) 0.5

D) 4

E) 1

CLAVE: A

PROBLEMA 15 (Prob. 170 del material de estudio)

En las expresiones mostradas:

$$[1 - \sin(\theta)][1 + \cos(\theta)] = x \dots (I)$$

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \sqrt{xy} \dots (II)$$

$x > 0$; $y > 0$. Determine una relación en términos de x e y .

A) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

B) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

C) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$

D) $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2}$

E) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$

CLAVE: E

PROBLEMA 16

Si se cumple que:

$$\sec^2(x) + \csc^2(x) + 2\tan(x) + 2\cot(x) = 8 ; \cot(x) < 0$$

Calcule el valor de $\sec^2(x)\cot(x)$:

- A) -2 B) -3 C) -4 D) -6 E) -8

CLAVE: C

PROBLEMA 17

Si
$$\frac{12\sin(x)}{\csc(x) - \cot(x)} + \frac{5\cos(x)}{\sec(x) - \tan(x)} = 30$$

Calcule el valor de $\tan(x)$.

- A) $12/5$ B) $5/12$ C) $1/5$ D) $1/12$ E) $3/5$

CLAVE: B